SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL DE LAPLACE

POR

DIETRICH VOELKER

Al eminente matemático GUSTAV DOETSCH, *Profesor en la Universidad de Friburgo en el sexagésimo aniversario de su nacimiento.*

INTRODUCCION

Por Integral de Laplace entendemos aquí la integral (de Riemann),

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathcal{F}(t)\, dt = \mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$$

donde $\mathcal{F}(t)$ es propiamente integrable en cada intervalo parcial finito, con excepción eventual de un número finito de puntos en los cuales $\mathcal{F}(t)$ puede ser impropia y absolutamente integrable; s es un parámetro complejo. Las investigaciones sobre la convergencia de dicha integral se refieren a su convergencia con respecto a su límite superior y en dependencia del parámetro s. El resultado más amplio que se conoce al respecto consiste en el teorema fundamental siguiente [1]:

Si $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge para un valor particular s_0 de s, converge también para todas las s con $Rs > Rs_0$ [2] y converge uniformemente en el recinto angular

$$s = s_0 + re^{i\varphi} \mid \varphi \mid \leq \vartheta < \frac{\pi}{2} \cdot$$

(1) Este teorema, como también los otros teoremas y resultados hasta ahora conocidos sobre la Integral de Laplace, se leen mejor en el extenso y detallado libro: G. DOETSCH, « Handbuch der Laplace. Transformation, Bond. I, Theorie der Laplace. Transformation, Birkhauser », Basel 1950.

(2) Es decir, hay un semiplano derecho (abierto) de convergencia.

Consecuencias de la convergencia uniforme en el mencionado recinto angular son, entre otras, las siguientes:

la función de s representada por la Integral de Laplace:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathscr{F}(t)\, dt$$

es analítica en el recinto angular; $f(s)$ es acotada ahí en ese recinto; $f(s)$ converge uniformemente hacia cero, si s tiende a infinito en el recinto angular; $f(s) \to f(s_0)$, si $s \to s_0$ en el recinto angular; en cada recinto parcial finito del recinto angular, $f(s)$ tiene a lo sumo un número finito de ceros, etc.

En vista de la importancia de tales consecuencias de la convergencia uniforme de $\mathfrak{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ en el recinto angular tal vez no carezca de interés mejorar el teorema fundamental, disminuyendo su hipótesis y aumentando su tesis; es decir, logrando uniformidad de la convergencia de $\mathfrak{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ en recintos más generales que el recinto angular.

TEOREMAS SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL DE LAPLACE

Primero disminuimos la hipótesis: en vez de la convergencia de la Integral de Laplace en un punto s_0 basta pedir que en s_0 las integrales parciales sean acotadas.

TEOREMA 1.

Si
$$\int_0^t e^{-s_0 t} \mathscr{F}(\tau)\, d\tau = 0(1)$$

$$\mathfrak{L}\{\mathscr{F}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \mathscr{F}(t)\, dt \text{ converge para } R_s > R_0.$$

Demostración:

Sea
$$\int_0^t e^{-s_0\tau} \mathscr{F}(\tau)\, d\tau = \Phi(t)\,.$$

Integrando por partes, se obtiene (*):

$$\int_0^\omega e^{-st}\, \mathcal{F}(t)\, dt = \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t}\, e^{-s_0 t}\, \mathcal{F}(t)\, dt$$

$$= \Big[e^{-(s-s_0)t}\, \Phi(t) \Big]_0^\omega + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t}\, \Phi(t)\, dt$$

$$= e^{-(s-s_0)\omega}\, \Phi(\omega) + (s - s_0) \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t}\, \Phi(t)\, dt \qquad [1]$$

El primer sumando en la [1] —siendo $|\varphi(t)| < M$ (constante)— se acota así:

$$| e^{-(s-s_0)}\, \Phi(\omega) | = e^{-(Rs-Rs_0)\omega}\, | \Phi(\omega) | < e^{-(Rs-Rs_0)\omega} . M.$$

Esta acotación tiende —a causa de $Rs - Rs_0 > 0$— hacia 0, si $\omega \to \infty$.

Para la convergencia del segundo sumando consideramos las integrales segmentarias $(\omega \leq \omega_1 < \omega_2)$; usando la integrabilidad(¹) de $\Phi(t)$ en cada intervalo finito obtenemos:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t}\, \Phi(t)\, dt \right| \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(Rs-Rs_0)}\, | \Phi(t) |\, dt$$

$$< M \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(Rs-Rs_0)t}\, dt$$

$$= M\, \frac{e^{-(Rs-Rs_0)\omega_1} - e^{-(Rs-Rs_0)\omega_2}}{Rs - Rs_0},$$

lo cual tiende hacia cero si ω tiende hacia infinito, pues $Rs - Rs_0 > 0$. Por lo tanto vale (si $\omega \to \infty$):

$$\int_0^\omega e^{-st}\, \mathcal{F}(t)\, dt \longrightarrow (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\, \Phi(t)\, dt.$$

(*) Este método es:

Si $\quad P(x) = A + \int_a^x p(\xi)\, d\xi \;$ y $\; Q(x) = B + \int_a^x q(\xi)\, d\xi,$

vale $\quad \int_a^\omega P(x) . q(x)\, dx = \Big[P(x) . Q(x) \Big]_a^\omega - \int_a^\omega p(x) . Q(x)\, dx.$

$P(x)$ y $Q(x)$ pueden ser no diferenciables.

(¹) $\Phi(t)$ como integral no es sólo integrable, sino también continua en todo el intervalo $0 \leq t < \infty$.

Una consecuencia inmediata del teorema 1 es el

TEOREMA 2.

Si

$$\int_0^t e^{-s_0\tau}\, \mathscr{F}(\tau)\, d\tau = 0(1)$$

y

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t e^{-s_0\tau}\, \mathscr{F}(\tau)\, d\tau \neq \underline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t e^{-s_0\tau}\, \mathscr{F}(\tau)\, d\tau \;(^1)$$

s_0 es un punto de la recta de convergencia [2].

Nota: Este teorema ofrece un método para determinar la abscisa de convergencia, pues basta encontrar un punto s_0 en el cual las integrales parciales son acotadas sin converger. Entonces Rs_0 es la abscisa de convergencia.

Demostración. — El punto s_0 no puede pertenecer al interior del semiplano de convergencia [3], porque $\mathscr{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ no converge en s_0 (segunda hipótesis).

El punto s_0 tampoco puede hallarse en el interior del semiplano de divergencia, es decir, a la izquierda de la recta de convergencia, porque entonces todos los puntos entre la recta $Rs_0 = \text{const.}$ y la recta de convergencia serían — según teorema 1 — puntos donde $\mathscr{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ convergería.

Por tanto s_0 debe ser un punto de la recta de convergencia.

Podría creerse que en la recta de convergencia siempre existe por lo menos un punto en el cual los integrales parciales son acotadas sin converger. Pero no es así, pues basta considerar el ejemplo $\mathscr{F}(t) = t$.

$\int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt$ tiene – como se sabe – el eje imaginario como recta de convergencia.

(1) Estos dos límites principales existen siempre, aquí como números finitos.

(2) La recta de convergencia es aquella recta vertical $Rs = \text{const.}$, que separa el semiplano (derecho) de convergencia del semiplano (izquierdo) de divergencia. En los puntos de la recta misma puede haber convergencia o divergencia.

(3) Tal semiplano existe, pues la abscisa de convergencia es $< \infty$ en virtud del teorema 1.

En el punto $s = 0$ las integrales parciales $\int_0^\infty \tau d\tau$ no son acotadas.

Si $s = iy \neq 0$, se tiene:

$$\int_0^t e^{-s\tau}\, \tau\, d\tau = \int_0^t e^{-iy\tau}\, \tau\, d\tau = \int_0^t (\cos y\tau - i \operatorname{sen} y\tau)\, \tau\, d\tau$$

$$= \int_0^t \tau \cdot \cos y\tau\, d\tau - i \int_0^t \tau \operatorname{sen} y\tau\, d\tau .$$

Para que las integrales parciales sean acotadas es necesario que sus partes reales y sus partes imaginarias sean acotadas.

En nuestro ejemplo las partes imaginarias no son acotadas:

$$\int_0^t \tau \operatorname{sen} y\tau\, d\tau = \frac{1}{y^2}\left[\operatorname{sen} yt - yt \cos yt\right]$$

Si se eligen, por ejemplo, los valores $t = \dfrac{2\, n\pi}{y}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, se tiene

$$\int_0^{\frac{2n\pi}{y}} \tau \operatorname{sen} y\tau\, d\tau = \frac{1}{y^2}\left[\operatorname{sen} 2\, n\pi - 2\, n\pi \cos 2\, n\pi\right]$$

$$= \frac{1}{y^2}\left[-2\, n\pi\right] \to -\infty .$$

si $n \to \infty$, y para cada valor de y.

Ahora vamos a ampliar el campo de convergencia uniforme de $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$.

Teorema 3.

Si $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge en s_0, $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge uniformemente en el recinto

R_3

$$|\, y - y_0\, | \leqq A\, (x - x_0)\, e^{B\,(x - x_0)}$$

$$s = x + iy \qquad\qquad A, B \geq 0 \text{ (arbitr.)}.$$

$$s_0 = x_0 + iy_0$$

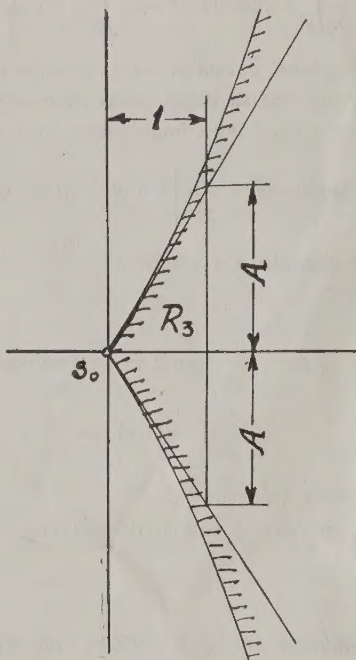
Notas:

1) El recinto R_3 no está contenido en ningún espacio angular $s = s_0 + re^{i\varphi}\ |\, \varphi\, | \leqq \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$. Pero cada tal espacio angular está contenido en un R_3, basta elegir $A \geqq \operatorname{tang.} \vartheta$.

2) El teorema 3 contiene como caso particular ($B = 0$) el teorema fundamental mencionado en la introducción.

Demostración:

Sea $$\int_t^\infty e^{-s_0 t} \mathcal{F}(\tau)\, d\tau = \psi(t),$$



que existe por hipótesis. La integración por partes generalizada da

$$\int_0^\omega e^{-st} \mathcal{F}(t)\, dt = \int_0^\omega e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} \mathcal{F}(t)\, dt$$

$$= \Big[- e^{-(s-s_0)t} \psi(t) \Big]_0^\omega - \int_0^\omega (s - s_0)\, e^{-(s-s_0)t} \psi(t)\, dt$$

$$= \psi(0) - e^{-(s-s_0)\omega} \psi(\omega) - \int_0^\omega (s - s_0)\, e^{-(s-s_0)t} \psi(t)\, dt. \qquad [2]$$

El segundo sumando de la [2] converge (si $\omega \to \infty$) a causa de $\psi(\omega) = 0(1)$ uniformemente en el semiplano $Rs \geqq Rs_0$, porque en él es $|e^{-(s-s_0)\omega}| = e^{-(x-x_0)\omega} \leqq 1$. El límite es igual a cero.

En cuanto al tercer sumando en la [2], usando la convergencia de $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ en s_0 podemos determinar para cada ε un Ω, de modo que

$$\left| \int_t^\infty e^{-s_0\tau} \mathcal{F}(\tau)\, d\tau \right| = |\psi(t)| < \varepsilon,$$

si $t \geqq \Omega(\varepsilon)$. En base a esto podemos acotar las integrales segmentarias del tercer sumando de la [2] en la forma siguiente:

Si

$$\Omega \leqq \omega_1 < \omega_2,$$

es

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} (s-s_0)\, e^{-(s-s_0)t}\, \psi(t)\, dt \right| \leqq \int_{\omega_1}^{\omega_2} |s-s_0|\, e^{-(Rs-Rs_0)t}\, |\psi(t)|\, dt$$

$$< |s-s_0| \,.\, \varepsilon \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(x-x)t}\, dt \qquad < |s-s_0|\, \varepsilon \int_{\omega_1}^{\infty} e^{-(x-x_0)t}\, dt \text{ (1)}$$

$$O\,(e^{-(x-x_0)\omega_1} - e^{-(x-x_0)\omega_2}) = O\,(e^{-(x-x_0)\omega_1}).$$

$$= \varepsilon \frac{|s-s_0|}{x-x_0} e^{-(x-x_0)\omega_1} \qquad = \varepsilon \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{x-x_0} e^{-(x-x_0)\omega_1}$$

$$= \varepsilon \sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}\, e^{-(x-x_0)\omega_1}$$

Sea ahora $A \geqq 1$; entonces vale en todo el recinto R_3 la desigualdad

$$1 \leqq A\, e^{B(x-x_0)} \leqq A^2\, e^{2B(x-x_0)}$$

Por tanto tenemos (para $A \geqq 1$):

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} (s-s_0)\, e^{-(s-s_0)t}\, \psi(t)\, dt \right| < \varepsilon \sqrt{A^2 e^{2B(x-x_0)} + A^2 e^{2B(x-x_0)}} \,.\, e^{-(x-x_0)\omega_1}$$

$$= \varepsilon \sqrt{2} \,.\, A \,.\, e^{B(x-x_0)}\, e^{-(x-x_0)\omega_1}$$

$$= \varepsilon \sqrt{2} \,.\, A \,.\, e^{-(x-x_0)(\omega_1 - B)}.$$

(1) Al hacer $\omega_2 = \infty$ no perdimos nada; pues vale la igualdad.

Si se elige $\omega_1 > B$, tenemos:

$$e^{-(x-x_0)(\omega_1-B)} \leqq 1 \text{ en } R_3, \text{ (1), (2)}$$

y así tenemos por fin:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} (s - s_0)\, e^{-(s-s_0)t}\, \psi(t)\, dt < \varepsilon \,.\, \sqrt{2} \,.\, A \,.\right.$$

Esta acotación tiende hacia 0 si $\omega_1 \rightarrow \infty$, uniformemente en todo el recinto R_3, siendo la acotación independiente de s en R_3.

Esto era válido para $A \geqq 1$. Si $0 \leq A < 1$, el recinto sólo se achica y queda un recinto parcial del recinto con $A \geqq 1$. En el recinto parcial la convergencia es por supuesto también uniforme y así queda demostrada la uniformidad del tercer sumando de la [2] en R_3 para todos $A \geqq 0$.

Como la convergencia del segundo aumento de la [2] es uniforme aún en el semiplano $Rs \geqq Rs_0$, que contiene cada recinto R_3, y como el primer sumando en la [2] $\psi(0)$ es constante, independientemente de s, queda demostrada la convergencia uniforme de

$$\int_0^{\omega} e^{-st}\, \mathscr{F}(t)\, dt$$

en R_3, si $\omega \rightarrow \infty$. El límite es:

$$\psi(0) - (s - s_0) \int_0^{\omega} e^{-(s-s_0)t}\, \psi(t)\, dt \,.$$

El teorema vale para un punto s_0 del interior del semiplano de convergencia, pero también si s_0 es un punto de la recta de convergencia. En este último caso el teorema da su mayor « rendimiento ».

El teorema 3 puede enunciarse en una forma más general:

Teorema 4.

Si $\mathcal{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ converge en s_0, $\mathcal{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ converge uniformemente en el recinto

(1) También en el semiplano $x \geqq x_0$; pero es suficiente el recinto R_3 ya que la acotación anterior vale solamente en R_3.

(2) Excluyendo el punto s, tendríamos $e^{-(x-x_0)(\omega_1-B)} \rightarrow 0$, y bastaría $|\psi(t)| < M$ (const.) en vez de $|\psi(t)| < \varepsilon$. Así en un recinto cerrado que excluye s, es de esperar convergencia uniforme si $\mathcal{L}\{\mathscr{F}(t)\}$ tiene en s_0 las integrales parciales acotadas. Ver teorema 6.

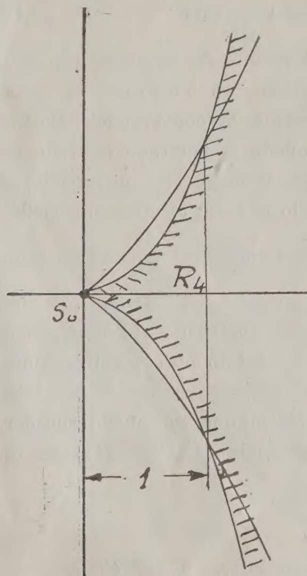
R_4: $\quad | y - y_0 | \leqq A\, (x - x_0)^{\alpha}\, e^{B(x-x_0)}$

$s = x + iy \qquad A, B > 0$ (arbitr.)

$s_0 = x_0 + iy_0 \qquad \alpha > 1 \qquad$ (»)

Demostración:

Si $\alpha = 1$, el teorema 4 es idéntico al teorema 3.



Sea $\alpha > 1$.

Si $x - x_0 \leq 1$, vale $(x - x_0)^{\alpha} \leq x - x_0$, es decir, en la franja vertical entre s_0 y $s_0 + 1$ (incl.).

$$A\, (x - x_0)^{\alpha}\, e^{B(x-x_0)} \leqq A\, (x - x_0)\, e^{B(x-x_0)}.$$

Aquí el nuevo recinto R_4 es recinto parcial de un recinto R_3. Por tanto en la parte de R_4: $Rs_0 \leq Rs \leq Rs_0 + 1$, la convergencia es uniforme.

Para $x - x_0 \geqq 1$ vale, si se toma $B_1 \geqq B + \alpha - 1$:

$$A\, (x - x_0)\, e^{B_1 (x-x_0)} \geqq A\, (x - x_0)\, e^{(B+\alpha-1)\,(x-x_0)}$$
$$= A\, (x - x_0)\, e^{B\,(x-x_0)} \,.\, e^{(\alpha-1)\,(x-x_0)}$$

y a causa de $\log (x - x_0) < x - x_0$

$$> A\,(x - x_0)\, e^{B\,(x-x_0)}\, e^{(\alpha-1)\log (x-x_0)}$$
$$= A\,(x - x_0)\, e^{B\,(x-x_0)}\, (x - x_0)^{\alpha-1}$$
$$= A\,(x - x_0)^{\alpha}\, e^{B\,(x-x_0)}\,.$$

Es decir

$$A\,(x - x_0)^{\alpha}\, e^{B\,(x-x_0)} < A\,(x - x_0)\, e^{(B+\alpha-1)(x-x_0)} \leqq A\,(x - x_0)\, e^{B_1\,(x-x_0)}.$$

Para $x - x_0 \geqq 1$ el recinto R_4 es subrecinto de un R_3. Por consiguiente la convergencia es uniforme en esta parte del R_4. Habiendo sido reconocida la convergencia uniforme del R_4 para $x_0 \leqq x \leqq x_0 + 1$, ella queda demostrada en todo el R_4.

Si bien el recinto R_4 es mayor que el espacio angular para valores grandes de s, no lo es —si $\alpha > 1$— cerca del punto s_0. Pues aquí el espacio angular tiene una abertura cualquiera $\left(|\vartheta| < \frac{\pi}{2} \right)$ mientras que el R_4 (con $\alpha > 1$) tiene la abertura cero. Como remedio parece ofrecerse (salvo $\alpha = 1$) una generalización del teorema 4 para $\alpha = 0$. Pero esto no es posible, pues en este caso un intervalo (de longitud arbitraria $2A$) de la recta de convergencia pertenecería al recinto, lo que no puede suceder, consistiendo la hipótesis en la convergencia de $\mathfrak{L}\{\mathfrak{F}(t)\}$ en un solo punto s_0. Empero vale el

TEOREMA 5.

Si $\mathfrak{L}\{\mathfrak{F}(t)\}$ converge en s_0, $\mathfrak{L}\{\mathfrak{F}(t)\}$ converge uniformemente en el recinto

R_5:
$$|y - y_0| \leqq A\, e^{B\,(x-x_0)} - A$$
$$A, B \geqq 0 \text{ (arbitr.)}$$

Demostración:

Consideramos el R_5 separado en dos partes cerradas:

I) $$0 \leqq x - x_0 \leqq 1\,.$$

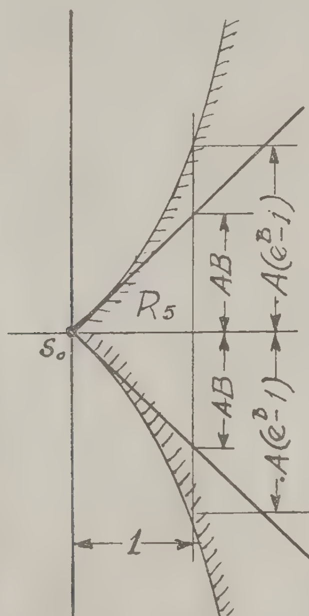
Ahí es

$$A\, e^{B\,(x-x_0)} - A = A\,[e^{B\,(x-x_0)} - 1] \leqq A\,[e^{B} - 1]\,(x - x_0)$$

como consecuencia de la concavidad de la función exponencial. Por tanto ahí el R_5 puede encerrarse en un recinto de tipo R_4 (con $\alpha = 1, B = 0$), y el teorema 4 da la uniformidad de la convergencia de $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ en el recinto parcial considerado del R_5

II)

$$x - x_0 \geqq 1$$



Aquí es

$$A\, e^{B(x-x_0)} - A \leqq A\, e^{B(x-x_0)} \leqq A\,(x - x_0)\, e^{B(x-x_0)},$$

donde la última curva corresponde a un R_3. Así la parte II) del R_5 es un recinto parcial de un R_3. Por lo tanto la convergencia es uniforme en la suma de las dos partes consideradas I) y II), es decir en R_5.

En los teoremas 3), 4) y 5) figuraba en la hipótesis la convergencia de $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ en un punto s_0. Si pedimos menos, es decir, sólo que las integrales parciales en s_0 sean acotadas, entonces s_0 es

necesariamente un punto de la recta de convergencia (teorema 2), y además no puede esperarse convergencia uniforme en un recinto que contiene el punto s_0 (ver nota 2, pág. 126), siendo s_0 un punto de divergencia.

Evidentemente tales teoremas que suponen sólo integrales parciales acotadas en s_0, pueden establecer la convergencia uniforme solamente en recintos que no tocan la recta de convergencia. Tales teoremas se deducen con facilidad combinando los teoremas 4) y 5) con teorema 1).

TEOREMA 6.

Si

$$\int_0^t e^{-s_0\tau} \mathcal{F}(\tau)\, d\tau = 0(1),$$

$\mathfrak{L}\{(\mathcal{F})\}$ converge uniformemente en el recinto

R_6:

$$x - x_0 \geqq \varepsilon$$
$$|y - y_0 - l| \leqq A(x - x_0 - \varepsilon)^\alpha e^{B(x-x_0-\varepsilon)}.$$
$$l, A, B \geqq 0 \text{ (arbitr.)}$$
$$\alpha \geqq 1 \text{ (»)}$$
$$\varepsilon > 0 \text{ (»)}$$

Demostración:

En los puntos

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon \\ y = y_0 + l \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x = x_0 + \varepsilon \\ y = y_0 - l \end{cases}$$

$\mathfrak{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge en virtud del teorema 1.
Dividamos el R_6 entre partes cerradas.

I) $R_6^{(I)}$: el « rectángulo »

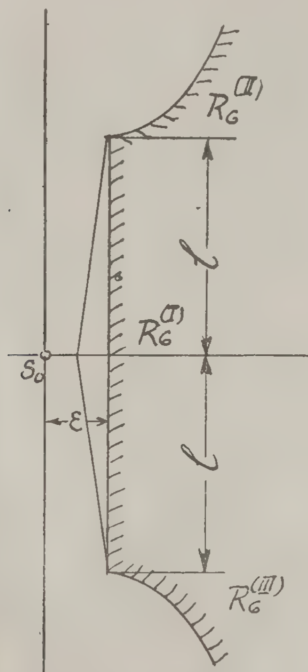
$$x - x_0 \geqq \varepsilon$$
$$|y - y_0| \leqq l$$

II) $R_6^{(II)}$: el recinto

$$x - x_0 \geqq \varepsilon$$
$$l \leqq y - y_0 \leqq A(x - x_0 - \varepsilon)^\omega e^{B(x-x_0-\varepsilon)}.$$

III) $R^{(III)}$: el recinto simétrico a $R_6^{(II)}$

$$x - x_0 \geqq \varepsilon$$
$$- A\,(x - x_0 - \varepsilon)^{\alpha}\, e^{B\,(x - x_0 - \varepsilon)} \leqq y - y_0 \leqq - l\,.$$



I) El rectángulo $R_6^{(I)}$ puede encerrarse en el espacio angular

$$| y - y_0 | \leqq \frac{2\,l}{\varepsilon}\left(x - x_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

cuyo vértice $s_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ es punto de convergencia según teorema 1, Así $R_6^{(I)}$ forma parte de un R_4 ($\alpha = 1$, $B = 0$).

II) $R_6^{(II)}$ es la mitad superior del recinto

$$| y - y_0 - l | \leqq A\,(x - x_0 - \varepsilon)^{\alpha}\, e^{B\,(x - x_0 - \varepsilon)},$$

lo que es un R_4, siendo el vértice el punto $x = x_0 + \varepsilon$, $y = y_0 + l$.

III) simétricamente a II).

El teorema 4 demuestra ahora la convergencia uniforme de $\mathfrak{L}\{\mathfrak{F}\}(t)$ en R_6.

El teorema correspondiente al teorema 5) es el

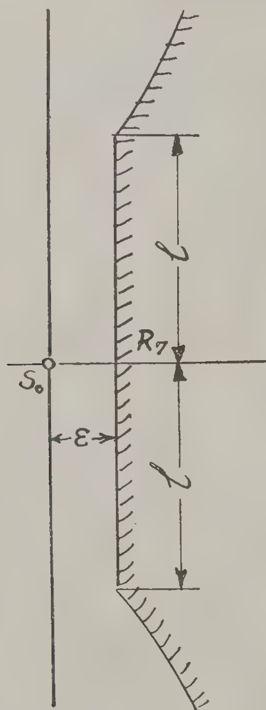
TEOREMA 7.

Si
$$\int_0^t e^{-s_0\tau}\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau = 0(1),$$

$\mathfrak{L}\{\mathfrak{F}(t)\}$ converge uniformemente en el recinto

R_7:
$$x - x_0 \geqq \varepsilon$$
$$|\,y - y_0 - l\,| \leqq A\,e^{B\,(x-x_0-\varepsilon)} - A\,.$$

$l,\ A,\ B \geqq 0$ (arbitr.)
$\varepsilon > 0$ (»)



Demostración: Como la del teorema 6, usándose ahora el teorema 5 en vez del teorema 4.

Ahora podríamos — usando los recintos y teoremas recién obtenidos — generalizar los teoremas indicados en la introducción. Pero considero innecesario formularlos detalladamente.

OBSERVACIONES

1) Los teoremas 1, 3, 4, 5, 6, 7 tienen contenido esencial sólo cuando la convergencia de la Integral de Laplace $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ es condicional o no puede reconocerse la convergencia *absoluta* en s_0. Pues si es sabido que $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge *absolutamente* en s_0, los teoremas se vuelven triviales: entonces hay convergencia uniforme (y absoluta) en el *semiplano* cerrado $R_s \geqq R_{s0}$.

2) De los recintos R_3, R_4, R_5, R_6 y R_7, ninguno contiene una recta vertical y con menos razón un semiplano derecho.

3) En los teoremas 3, 4, 6 y 7 la expresión $e^{B(x-x_0 x \kappa)}$ (o $e^{B(x-x_0-\varepsilon)}$) puede ser reemplazada por $e^{B(x-x_0)\beta}$ (o $e^{B(x-x_0-\varepsilon)\beta}$ (con $0 \leqq \beta \leqq 1$). Queda pendiente el problema si es posible $\beta > 1$.

4) En el teorema 5 dicho reemplazo con un B entre 0 y 1 es posible solamente en $R_s \geqq R_{s0} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Queda por saber si ε puede ser cero, es decir, si la tangente al contorno del recinto puede ser vertical. Al mismo problema conduce el teorema 4, si se trata de la extensión de α a valores < 1.

5) Igualmente carece de solución si otras funciones que crecen más rápidamente que la exponencial puedan servir como contornos de recintos de convergencia uniforme de la Integral de Laplace.

6) La hipótesis de los teoremas 1, 6 y 7, que las integrales parciales en s_0 sean acotadas es, por supuesto, bien cumplida si $\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\}$ converge en s_0.

ZUSAMMENFASSUNG

Die gleichmässige Kovergenz des Laplace-Integrals war bisher gesichert in jedem Winkelraum, dessen Scheitel s_0 ein Konvergenzpunkt und dessen Öffnungswinkel φ kleiner als π war: $|\varphi| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Dieser Winkelraum wird nunmehr auf Räume erweitert, dessen Bergrenzung Exponential-kurven und in keinen Winkelraum enthalten sind. Die Bedingung der Konvergenz in s_0 wird gemildert: es genügt Beschränktheit der Partialintegrale in s_0.

Universidad Nacional de Cuyo
Departamento de Investigaciones Cientificas
Mendoza

ESTUDIOS SOBRE BASIDIOMYCETES

II. SISTEMATICA Y BIOLOGIA DE TRES ESPECIES DE « FOMES »

POR

CELINA L. IACONIS Y JORGE E. WRIGHT

(*Continuación* *)

SEGUNDA PARTE

DESCRIPCIÓN DE LAS ESPECIES Y CULTIVOS

ANTECEDENTES ACERCA DE LOS CULTIVOS. — En 1918 LONG y HARSCH ([44]) propusieron un método para identificar hongos superiores, especialmente aquellos que producen podredumbres en maderas, basado en sus caracteres de cultivo, y publicaron un estudio realizado sobre varias cepas de *Fomes texanus*, *Polyporus Farlowii* y *Trametes pini*, entre otros. Como criterios diferenciales para la identificación, adoptaron los caracteres macro y microscópicos que presentaban los cultivos en 10 medios típicos.

Este sistema fué más tarde desarrollado por C. W. FRITZ ([30]), quien estudió detalladamente los caracteres de 18 especies de hongos que producen pudrición en « balsam fir » (*Abies balsamea*).

D. W. BAXTER realizó una intensa labor en el transcurso de varios años, describiendo los rasgos de cultivo de *Fomes fraxineus* ([5]), y de muchos hongos resupinados de la región de los Grandes Lagos (Estados Unidos) ([6] al [11]).

CARTWRIGHT ([20-21]), y CARTWRIGHT y FINDLAY ([23]), también contribuyeron notablemente en el estudio del comportamiento en cultivo de muchas poliporáceas, y en los últimos años produjeron una obra de conjunto en la que resumen la mayor parte de los trabajos sobre hongos que atacan madera.

En las últimas dos décadas estas investigaciones se han multiplicado en forma asaz numerosa, y muchos autores en países diversos

* Ver Entrega anterior.

se especializaron en grupos de huéspedes determinados, sobre todo los de importancia económica. Así, por ejemplo, los dos autores citados en último término, en su importante trabajo, sobre podredumbre de robles en Gran Bretaña ([22]), describieron los caracteres de cultivo de unas 50 especies. DAVIDSON, CAMPBELL y VAUGHN ([28]), por su parte, publicaron descripciones de cultivos de 47 especies dañinas para los robles vivos en los Estados Unidos, y los dos primeros de estos autores dieron a conocer, además, las características ([26]) de 9 especies adicionales que provocan pudrición en los guindos conocidos como « black cherry » (*Prunus serotina*). WALEK-CZERNECKA ([79]) publicó descripciones de 21 especies aisladas de durmientes en Polonia, mientras que ROBAK hizo lo propio para 6 importantes hongos que pudren coníferas en Noruega ([65]).

Algunos autores dedicaron sus afanes al estudio de la biología y fisiología de una especie en particular ([15], [17], [33], [60], [80]). Varios investigaron fases diversas de los cultivos de *Fomes*. Entre ellos, MOUNCE ([45]) sobre *F. pinicola*, y HILLBORN ([32]) sobre *F. fomentarius*; HOPP ([35]) y VERRALL ([77]) sobre *F. igniarius*, recalcando especialmente la variación entre distintas cepas. Finalmente, CAMPBELL ([19]) dió a conocer un estudio de conjunto de las características de cultivo de las especies de *Fomes*, en el cual presentó una clave para su identificación. HUMPHREY y SIGGERS ([37]) estudiaron la influencia de la temperatura sobre el crecimiento de muchas especies, y anteriormente SNELL, HUTCHINSON y NEWTON ([67]) ya habían utilizado la temperatura para diferenciar a *Fomes roseus* y *Trametes subrosea*. Hemos citado antes los trabajos de DAVIDSON, CAMPBELL y BLAISDELL ([27]) en relación con la adaptación del método de Bavendam para el estudio de oxidasas. Además, HAAS y HILL ([31]) verificaron que la presencia de las zonas de difusión, en estos ensayos, es debida a la oxidación de los ácidos tánico y gálico. BADCOCK ([1-3]) publicó interesantes estudios acerca de la producción de distintos olores en los cultivos, y un método para obtener carpóforos « in vitro », de algo menos de un centenar de especies. Las investigaciones relacionadas con la actividad enzimática han merecido, también, la atención de los estudiosos, y se han realizado, por lo general, sin la descripción previa de los cultivos, por lo que no creemos necesario dar aquí una reseña bibliográfica de las mismas. No obstante lo antedicho, diremos que BOSE y SARKAR ([16]), al estudiar las enzimas de 8 poliporos, dieron detalles de sus caracteres de cultivo.

El interés que provocó el problema sexual en los Basidiomycetes originó un caudal bibliográfico apreciable. Si bien su mención quizás no venga al caso en cuanto a la descripción de especies que producen pudrición en maderas, es evidente que se puede aplicar en esta clase de investigaciones un fenómeno fundamental, por lo menos, hallado durante el estudio de dicho problema. « Se ha demostrado —dice Nobles— que, en especies heterotálicas, cada micelio monospórico obtenido de un cuerpo fructífero de una especie determinada, puede « emparejarse » con cualquier micelio, también monospórico, de otro esporóforo de la misma especie, de fuente distinta, de manera que se produce un micelio formador de fíbulas. Esta fertilidad completa es aceptada como prueba de que los carpóforos pertenecen a la misma especie ».

Mounce y Macrae ([48 a]) aclararon, mediante esta técnica, la diferencia sexual entre *Fomes roseus* y *F. subroseus*, demostrando la validez de ambas especies, y posteriormente Nobles ([56]) aclaró en igual forma, el complejo de *Trametes serialis*. Quien se ocupó preferentemente de estas cuestiones fué Vandendries ([69-76]), aunque habría que citar, asimismo, la larga lista de trabajos de Quintanilha, Pinto-Lopes y otros.

Las propiedades antibióticas de los cultivos de hongos destructores de madera han sido ampliamente estudiadas en los últimos años, pero estimamos inconveniente extendernos aquí en consideraciones de esa naturaleza.

En nuestro país, todo este campo es virgen todavía, y la única tentativa de descripción de los caracteres de cultivo de un hongo lignícola fué hecha por el segundo de los autores de este trabajo ([83]).

Fomes Fr. (p. p.), Nov. Symb. (1851), 31

Fomes Kickx, *Flore Crypt. d. Flandres*, II (1867) 237; *Phellinus* Quél., *Ench. Fung.* (1886) 172; *Ochroporus* Schroet., *Krypt. Fl. Schlesw.* III (1889) 483; *Elfvingia* Karsten., *Krit. Ofvers. Finl. Basid.* (1889) 333; *Scindalma* Hill, ex O. Kunze, *Rev. Gen.* III (1893) 517; *Ungulina* Pat., *Ess. Tax.* (1900) 102; *Pyropolyporus* Murrill, *Bull. Torrey Club* XXX (1903) 109; *Nigrofomes* Murrill, *ibíd.* XXXI (1904) 425; *Fulvifomes* Murrill, *Trop. Polyp.* (1915) 81; *Pseudofomes* Laz., *R. Acad. Cienc. Madrid* XIV (1916) 582; *Friesia* Laz., *ibíd.* XIV (1916) 587.

Píleo típicamente perenne, lignícola, corchoso o más generalmente leñoso; sésil, demediado, ungulado o aplanado, a veces imbricado o resupinado; contexto blanco o de colores claros a

castaño (*) obscuro o rojizo; superficie incrustada o anoderma; tubos típicamente estratificados, con las capas separadas o no por micelio; superficie himenial poroide; poros circulares, angulosos o dedaloides; cistidios y setas presentes o ausentes; esporas lisas, las más de las veces globosas o subglobosas, hialinas o coloradas.

Existe la tendencia entre los autores de subdividir o delimitar el concepto friesiano del género. Es evidente que hay agrupaciones dentro de *Fomes* Fr. que pueden segregarse, y en este sentido se han dirigido los esfuerzos de Quélet, Patouillard, Karsten y Murrill, entre otros. Este último, por ejemplo, incluyó 10 géneros dentro de la tribu *Fomitae*, separando en primer lugar el *Ganoderma*, que tiene caracteres bien definidos y propios, y en segundo lugar el *Amauroderma*, y agrupando a los ocho restantes, sésiles, de acuerdo con el color de contexto. Desgraciadamente, este autor no siguió su propio sistema y, además, no tuvo en cuenta las correlaciones intergenéricas, creando una confusión en la taxonomía del grupo. Lloyd ([40]) hizo algo parecido, aunque no dió categoría de géneros ni subgéneros a los pocos nuevos nombres que aplicó. Ninguno de los sistemas presentados fué seguido universalmente. En los últimos años, Cunningham ([24 a]) propuso un sistema basado en la naturaleza de las hifas y basidios, pero necesita la prueba del tiempo y el estudio de materiales de las regiones más diversas, para poderse abrir juicio acerca de sus bondades (**).

Claves

Identificación de los ejemplares

A) Píleo delgado o de grosor moderado, conchado o aplanado, con contexto de color leonado, que se observa también entre los estratos de tubos, de color algo más obscuro; superficie del píleo escruposa (***); poros no visibles a simple vista.. *F. pseudosenex*

B) Píleo grueso, generalmente ungulado, con contexto, cuando presente, de color castaño; superficie del píleo rimosa con la edad; tubos indistintamente estratificados, sin capas de contexto entre ellos, concoloros; poros visibles a simple vista.

(*) Para muchos autores el género *Fomes* comprende solamente las especies de contexto blanco o claro.

(**) Bridge Cooke, W. — «Recent systems of Polypore classification». *Lloydia* **12**, 4 (1949), 220-228.

(***) Véase la definición de este término en la descripción de *F. pseudosenex*.

1. Con cistidios abundantes; superficie de los poros generalmente convexa; margen obtuso y de color más claro que el resto; cuando joven, aterciopelado .... *F. chaquensis* n. sp.

2. Sin cistidios, o muy escasos; superficie de los poros generalmente cóncava; margen por lo común subagudo .... *F. dependens*

IDENTIFICACION POR LOS CULTIVOS

Huésped	Color	Reacción	Septas	Estructuras especiales	Clamidosporas	Conidios	Oídios	Velocidad de crecimiento	Fructificaciones	Reverso	
1	1	1	2	0	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	1	1	2	7	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	1	1	2	9	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	2	1	2	0	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	2	1	2	4	2	2	2	4	1	1	*F. dependens*
1	2	1	2	4	2	2	2	4	2	1	*F. dependens*
1	2	1	2	7	1	2	2	2	2	1	*F. pseudosenex*
1	2	1	2	7	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	2	1	2	9	1	2	2	2	2	1	*F. pseudosenex*
1	2	1	2	9	2	2	2	2	2	2	*F. chaquensis*
1	2	1	2	9	2	2	2	4	1	1	*F. dependens*
1	2	1	2	9	2	2	2	4	2	1	*F. dependens*

Fomes pseudosenex (Murrill) Sacc. et Trott., *Syll. Fung.* XXI (1912), 292 (*)

Lloyd, *Myc. Writ.* 4 (1912) Lett. 39, p. 2; ibíd., *Myc. Writ.* 4 (1913) Lett. 48, p. 8; ibíd., *Synop. Fomes* (1915), 255-256; ibíd., *Myc. Writ.* 5 (1917) Lett. 65, p. 8; ibíd., *Myc. Writ.* 6 (1920), 1091; ibíd., *Myc. Writ.* 7 (1923), 1209; Rick, *Broteria* XXI, 1 (1924), 7; Torrend, *An. 1ª Reun. Sul-Amer. Bot.* Río de Janeiro II (1938), 329.

Syn. *Pyropolyporus pseudosenex* Murrill, *North American Flora* IX, 2 (1908).
Fulviformes pseudosenex (Murrill) Murrill, *Trop. Polyp.* (1915), 83.

(Lám. II, 1)

a) DESCRIPCIÓN DEL ESPORÓFORO. — *Caracteres macroscópicos.* — *Píleo* leñoso, perenne (**), desigualmente demediado, sésil; 23 × 17 × × 4 cm; superficie con numerosas zonas concéntricas, formando una delgada capa o costra de menos de 1 mm de espesor, y que a veces

(*) Mientras se encontraba en prensa este trabajo apareció el artículo de LOWE, J. L., « Perennial polypores of North America. *Fomes* with colored spores ». *Mycologia*, 44 [1952], 228-238, donde trata ésta especie.

(**) Se contaron hasta 16 capas o estratos de tubos.

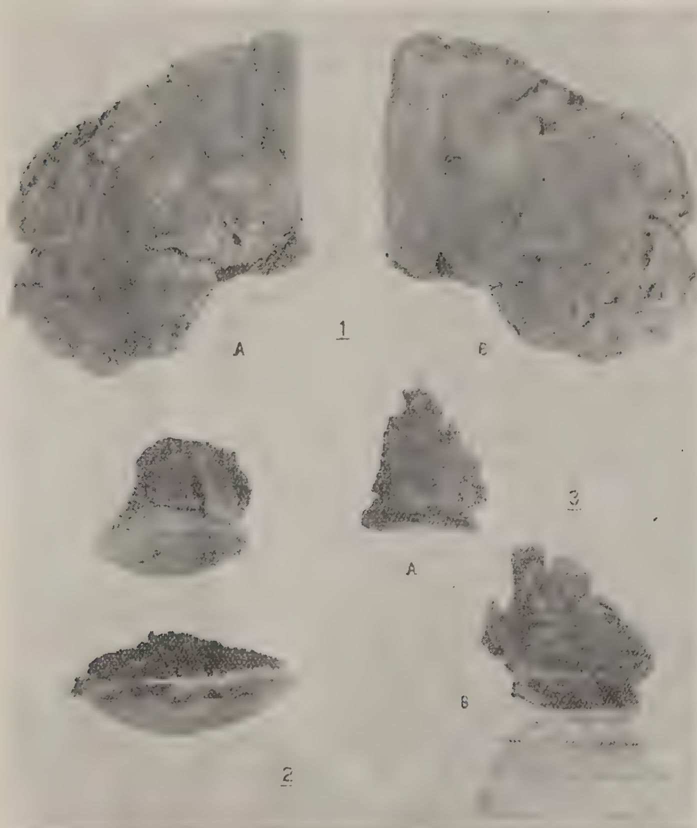


LÁMINA II.

1 — *Fomes pseudosenex* (Murrill) Sacc. & Trott.
A — Superficie del píleo.
B — Superficie himenial (poros).

2 — *Fomes chaquensis* n. sp.
Dos ejemplares característicos (el inferior es el *typus*).

3 — *Fomes dependens* (Murrill) Sacc. & Trott.
A — Ejemplar procedente del Chaco, sobre *Caesalpinia melanocarpa.*
B — *Typus*, original de Murrill, conservado en el Instituto Spegazzini (La Plata).

(Originales: 1, reducida a $^1/_3$; 2, reducida a $^1/_4$ y 3 reducida a $^2/_3$).

resulta imperceptible, ligeramente tuberculosa, o mejor aún « escruposa » (*); margen desigualmente ondulado (el conjunto ofrece el aspecto de numerosos píleos unidos o concrescentes, pero este efecto se debe al crecimiento desigual); en cada estrato el margen es independiente, agudo y liso, aparentemente estéril en la cara inferior, donde se nota un ribete de color más obscuro, y a veces más claro, que el resto; color ocre claro (« Clay »; OO-7-6) en el borde de la cara superior (partes más nuevas), y castaño obscuro, de tonos diversos (« Cinnamon brown » a « Prout's Brown »; SO-3-6) en las restantes. *Contexto* delgado, 2 mm de grosor, aproximadamente, y formando pequeñas capas entre los tubos; de color leonado brillante u ocre (« Clay »; O-13-7). *Tubos himeniales* ligeramente oblicuos, en capas delgadas bien netas, estratificadas, de 0,5 a 4 mm de longitud, aunque la mayor parte mide 1,5-2,5 mm; los más recientes rellenos con micelio que tapa las aberturas al exterior casi por completo; de color más obscuro que el contexto (« Amber brown »; OOS-8-9). *Poros* no visibles sin aumento; la mayoría tapados con micelio, lo que da al conjunto un aspecto aterciopelado muy fino; muchos poros están rellenos con micelio blanco, las bocas son circulares y los disepimentos gruesos; sin setas; 7-10 por mm; de color amarillo ocráceo (desde « Antimony Yellow »; OOY-16-8, pasando por « Ochraceous buff », 0-16-9, a « Clay »; 0-13-7).

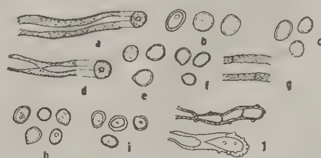


FIG. 1. — Características microscópicas de *Fomes pseudosenex* (Murrill) Sacc. & Trott: *a*) Hifas del contexto, mostrando el engrosamiento de las paredes; *b*) esporas del paratipo; *c*) esporas del ejemplar LPS 16929; *d-e*) hifa y esporas del ejemplar LPS 16935; *f-g*) esporas e hifas de ejemplar brasileño; *h-j*) basidiosporas, esporas conidiales e hifas del ejemplar misionero. (Original).

Caracteres microscópicos. — *Basidiosporas* subglobosas (vistas en HOK al 5 %), con episporio grueso, de color ferruginoso observadas con gran aumento (inmersión en aceite, 2295 ×), aproximadamente

(*) Adoptamos la palabra indicada, derivada del latín *scruposus, -a, -um*, y ya usada por los autores de habla inglesa, para designar las superficies ásperas, pedregosas, escarpadas, pero que no llegan a resquebrajarse.

« Clay » a « Mars orange »; miden 4,2-5,4 micrones, aunque la mayoría se encuentra dentro de los límites, 4,6-4,8 micrones (Fig. 1, *b*, *c*, *e*, *f*, *h*). *Esporas conidiales* en la superficie del píleo muy numerosas, pero algo más pequeñas, pues miden 3,8-4,2 micrones; en partes parecen angulosas (Fig. 1, *i*). *Hifas* terminales de la parte himenial muy características, muy coloradas (ferruginosas), en forma de basto, de paredes gruesas, poca luz y con numerosas prominencias nodulares que no parecen cristalinas; estas tuberosidades se encuentran todo a lo largo y no sólo en las extremidades (Fig. 1, *a*, *d*, *g*, *j*).

Material examinado:

ARGENTINA: Misiones, Ruta 101, Km 501; leg. Celina L. Iaconis, 2-II-1949. Herb. LCF B-154 (Cult. puro nº 661). Sobre árbol vivo de *Peltophorum dubium*; det. John A. Stevenson (EE. UU.). — MÉXICO: Oaxaca; leg. C. L. Smith, 1895, como *Pyropolyporus pseudosenex* Murrill (*paratypus*) NY; det. Patouillard como *F. senex* « típico ». Este es el material mexicano citado por Murrill. — Otro ejemplar sin localidad ni fecha, det. por Spegazzini como *F. fastuosus* Lév. y *Polyporus conchatus* Fr., LPS 16927. — ARGENTINA: Formosa, 1906; det. por Spegazzini como *Polyporus calcitratus* y corregido por Bresadola como « *F. rhabarbarinus*, afín a *F. Korthalsii* ». — CUBA: Fungi Cubenses Wrightiani nº 264, LPS 16935, como *F. calcitratus* B. & C., corregido por Spegazzini como *F. rhabarbarinus* Berk. Según LLOYD (*), los ejemplares distribuídos por C. Wright con el nº 264 de Fungi Cubenses como *F. calcitratus*, son *F. pseudosenex*; nuestro estudio confirma lo anterior. — BRASIL: S. Leopoldo, leg. & det. J. Rick, 1936; Herb. Anchieta nº 15781.

Observaciones. — La especie estudiada es muy afín a *F. fastuosus* Lév., distinguiéndose de ella por el contexto más leonado. También es semejante a *F. rhabarbarinus* Berk., separándose de esta especie por la ausencia de setas. Puede afirmarse que *F. pseudosenex* es *F. rhabarbarinus* sin setas.

b) DESCRIPCIÓN DEL CULTIVO. — (Lám. III, B, y Fig. 2).

Clave patrón: 1 2 1 2 (7, 9) (1, 2) 2 2 2 2 (1, 2).

Cepa examinada: ARGENTINA, Misiones, Ruta 101, Km 501. Sobre árbol vivo de *Peltophorum dubium* (LCF nº 661).

Características del desarrollo (Lám. III, B). — *Crecimiento* moderado, formando en 14 días una capa miceliana de 7 cm (a 24° C medía 4,8 cm) de diámetro; las cajas se cubrieron totalmente a las 3 semanas (mientras que a 24° C tardaron menos de 4 semanas). *Zona marginal* difusa, con micelio aéreo aracnoide, hialino; en los cultivos

(*) « *Synop. Fomes* », p. 262.

viejos el margen es festoneado. *Capa miceliana* no separable del agar, aterciopelada sobre el inóculo, haciéndose aracnoide-algodonosa hacia la periferia, de color amarillo fuerte, tornándose castaña hacia el margen (« Cadmium Yellow » a « Primuline Yellow » sobre

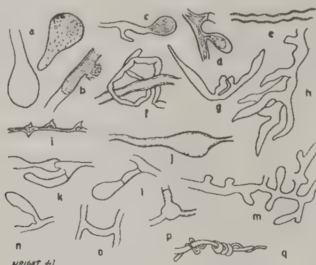


FIG. 2. — Características microscópicas de cultivo de *Fomes pseudosenex* (Murrill) Sacc. & Trott.: *a*) clamidosporas; *b*) hifa con cristales (cistidios incrustados?); *c*) formación de una clamidospora; *d*) principio de ramificación hifal; *e*) hifa fibrosa; *f*) ovillo miceliano de hifa hialina envolviendo una fibrosa; *g*) ramificación hifal; *h*) ramificación en cornamenta; *i*) hifa con pequeñas setas cónicas; *j*) engrosamiento de una hifa fibrosa; *k*) curiosa ramificación en una septa; *l*) terminación hifal globulosa; *m*) hifa con ramificación múltiple; *n*) ramificación hifal fibrosa; *o*) puente hifal hialino; *p*) ramificación típica con engrosamiento; *q*) ovillo miceliano típico del micelio sumergido. (Original; los dibujos no están en escala común; 2295 ×).

el inóculo; « Mahogany Red » pasando a « Vinaceous Rufous » y « Zinc Orange »; OY-17-11, SSO-6-12 a OOS-13-12); azonada. *Reverso* castaño rojizo, radialmente desparejo desde el centro (muy obscuro) hasta la periferia (más claro); colora el agar. *Olor* ausente o débilmente « sui generis ». *Fructificación* no se observó en ningún momento.

Características hifales. — *Zona marginal* con hifas de dos tipos: *a*) hialinas, tabicadas, de paredes delgadas, 2,4 micrones, y *b*) hifas con clamidosporas terminales, piriformes, de 4-9 micrones de ancho (Fig. 2, *a* y *c*). *Micelio aéreo*: *a*) hifas flexuosas, de paredes gruesas, amarillas, poco o nada tabicadas, que no toman el colorante; algunas constreñidas (Fig. 2, *e*); *b*) hifas delgadas, con paredes gruesas que coloran bien y poseen como espinillas (Fig. 2 *i*); *c*) hifas con cristales en pequeños mamelones (Fig. 2 *b*); *d*) hifas en cornamenta (Fig. 2 *h*). *Micelio sumergido*: 1) hifas como las de *a*) de la zona marginal; 2) hifas helicoidales; 3) hifas con clamidosporas terminales o intercalares.

Reacción sobre agar con ácidos tánico y gálico. — Las zonas de difusión son moderadamente fuertes a fuertes con gálico, y fuertes con tánico, creciendo bien sobre ambos medios (más de 2 cm en dos semanas sobre gálico, y casi 4 sobre tánico).

Poder antibiótico. — No se observó esta propiedad con respecto a las bacterias ensayadas.

(*Concluirá*)

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CIENTO QUINCUAGÉSIMO QUINTO